

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

aula 4

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.ulisboa.pt)

Cap. 1 Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

Cap. 1 – Técnicas de Resolução em Otimização Combinatória

- 1.1 Introdução
- 1.2 Relaxações
- 1.3 Resolução exata de problemas
 - Algoritmo de *branch-and-bound*
 - Algoritmo de planos de corte
- 1.4 Utilização de software

Bibliografia

- F.S. Hillier; G.J. Lieberman, Introduction to Operations Research, 9th ed., McGraw-Hill, 2009.
- L. Wolsey, Integer Programming, John Wiley & Sons, 1998.

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Cut

- **Técnicas:**
 - Pré-processamento de Problemas
 - Geração de Planos de Corte
 - *Branch & Cut*
- **Pré-processamento**
 - Objetivo – arranjar formulações mais simples por inspeção da inicial
 - Técnicas:
 1. Fixação de Variáveis (sem eliminar SA's)
 2. Eliminação de restrições redundantes
 3. “Apertar” restrições – reduzir a RA do PLR sem eliminar SA do PLI

Programação Binária!

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



PLB

1. Fixação de Variáveis

Ex. a)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases} \quad \boxed{}$$

Ex. d)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \quad \boxed{}$$

Ex. b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \quad \boxed{}$$


Ex. e)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \quad \boxed{}$$

Ex. c)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \quad \boxed{} \quad \boxed{}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



PLB

1. Fixação de Variáveis

Ex. a)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 0$$

Ex. d)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow x_2 = 1$$

Ex. b)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0$$

Ex. e)

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0 \wedge x_1 = 1$$


Ex. c)

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow 5x_1 \leq 2 + 2x_3 \Rightarrow x_1 = 0$$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19

81

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



PLB

➤ Ao fixar o valor de uma variável devemos substituí-la pelo seu valor em toda a formulação!

Ex.:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 & \geq 2 \\ x_1 + & x_4 + x_5 & \leq 1 \\ & & -x_5 + x_6 \leq 0 \\ x_j \in \{0,1\}; & j = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19

82

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



PLB

- Ao fixar o valor de uma variável devemos substituí-la pelo seu valor em toda a formulação!

Ex.:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_1 + x_4 + x_5 \leq 1 \\ -x_5 + x_6 \leq 0 \\ x_j \in \{0,1\}; j = 1, \dots, 6 \end{array} \right\} \Rightarrow x_4 = x_5 = 0 \Rightarrow x_6 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_2 - 2x_3 \geq -1 \\ x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_2 + 2x_3 \leq 1 \\ x_2, x_3 \in \{0,1\} \end{array} \right\}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Cut

2. Restrições Redundantes

Ex. a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{array} \right.$$

Ex. b)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array} \right.$$

CPLEX → pré-processamento automático
 elimina variáveis
 elimina restrições redundantes

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Cut

3. "Apertar" Restrições

Ex.: $Max z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.a: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

RA =

PLR $Max z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.a: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Cut

3. "Apertar" Restrições

Ex.: $Max z = 3x_1 + 2x_2$

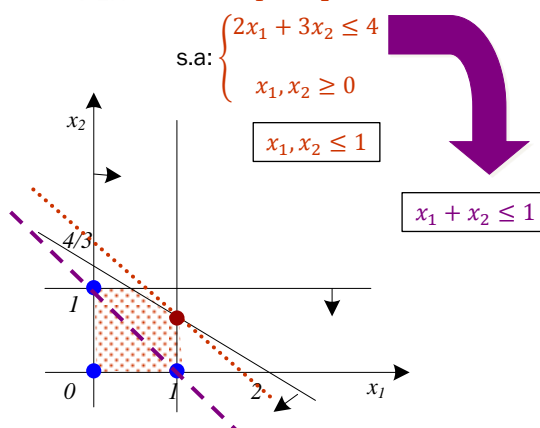
$$s.a: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \in \{0,1\} \end{cases}$$

RA = $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$

$x^* = (1,0)$

PLR $Max z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.a: \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



Branch & Cut

Algoritmo: “Apertar” restrição

0. Dada uma restrição de “ \leq ”: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$ e $x_j \in \mathbf{B}$, $\forall j$
1. Calcular: $S = \sum_{j:a_j>0} a_j$
2. Se $\exists a_k: S < b + |a_k|$ ir para **3**
C.c. FIM (a restrição já não pode ser alterada)
3. Se $a_k > 0$ fazer: $\alpha \leftarrow S - b$; $\beta \leftarrow S - a_k$; $a_k \leftarrow \alpha$; $b \leftarrow \beta$
C.c. fazer: $a_k \leftarrow b - S$
4. Voltar a **1**

Ex: Aplicar este algoritmo ao exemplo anterior!

Branch & Cut

Ex.: “Apertar” as restrições:


- i) $4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$
- ii) $3x_1 - x_2 + 4x_3 \geq 1$

➤ Geração de cortes

Seja: $\sum_j a_j x_j \leq b$ com $a_j \geq 0, \forall j$

- Encontrar um grupo de variáveis - **cobertura mínima** - na restrição tal que:
- a) A restrição seja violada se todas assumem valor unitário
 - b) A restrição é verificada se uma só qualquer das variáveis for nula
 - c) Sendo S o conjunto de variáveis na restrição que verificam (a) e (b), e $|S| = N$, introduzir a restrição: $\sum_k x_k \leq N - 1$

Ex.: iii) $4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

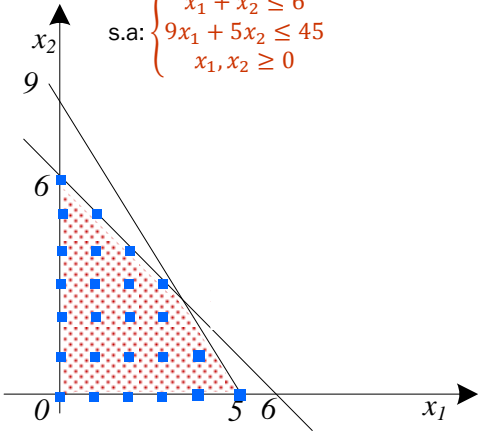
Cortes em PLI

Ex.: $Max z = 8x_1 + 5x_2$
s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$


PLR $Max z = 8x_1 + 5x_2$
s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

RA

$x^* =$



SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19 89



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

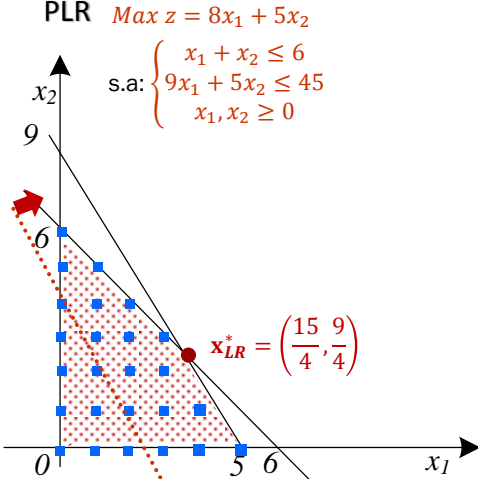
Cortes em PLI

Ex.: $Max z = 8x_1 + 5x_2$
s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$


PLR $Max z = 8x_1 + 5x_2$
s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

RA

$x^* = (5,0)$



SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19 90



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} Z - 8x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_4 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$


Escrever o sistema com VB:
 x_1, x_2 e Z

...

...

91

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} Z - 8x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 9x_1 + 5x_2 + x_4 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Escrever o sistema com VB:
 x_1, x_2 e Z

...

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = \frac{165}{4} \\ x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4} \\ x_2 + \frac{9}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

92

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19

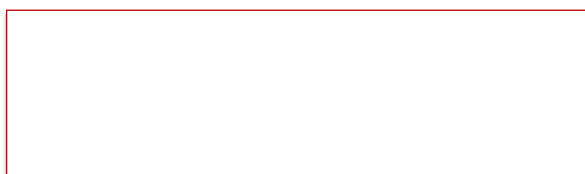
OTIMIZAÇÃO INTEIRA



Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z} \\ x_3 = 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \text{Separando a parte inteira da fracionária}$$

Corte: parte fracionária ≤ 0 

OTIMIZAÇÃO INTEIRA




Branch & Cut

Cortes em PLI

$$\begin{cases} x_1 - \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z} \\ x_3 = 6 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 45 - 9x_1 - 5x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \text{Separando a parte inteira da fracionária}$$

Corte: parte fracionária ≤ 0 $\frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \dots$

$$\dots \Leftrightarrow 3x_1 + 2x_2 \leq 15$$



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

Cortes em PLI

Ex.: $Max z = 8x_1 + 5x_2$

s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$

PLR $Max z = 8x_1 + 5x_2$


s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

RA

$x^* = (5,0)$

Solver

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19 95



OTIMIZAÇÃO INTEIRA

Branch & Cut

Cortes em PLI

Ex.: $Max z = 8x_1 + 5x_2$

s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$

PLR $Max z = 8x_1 + 5x_2$

s.a.: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 9x_1 + 5x_2 \leq 45 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

RA

$x^* = (5,0)$

$x_{LR}^* = (5,0)$

SIMULAÇÃO E OTIMIZAÇÃO (MODEE) – 2018/19 96

Trabalho 3

A. Encontrar cortes de cobertura mínima para a restrição em PLB:

$$6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 10$$

B. Aplicar os métodos aprendidos ao seguinte PLB por forma a obter um problema equivalente com menos restrições funcionais. Se possível, identifique uma SO sem resolver o problema.

$$\text{Max } z = x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 + x_8 + 3x_9$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} 3x_2 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ -x_2 - x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ x_2 + 2x_6 + 3x_7 + x_8 + 2x_9 \geq 4 \\ -x_3 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 - 2x_8 + x_9 \leq 5 \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \end{cases}$$

C. Utilizando o método dos planos de corte resolva o seguinte PLI:

$$\text{Min } z = 6x_1 + 8x_2$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+ \end{cases}$$